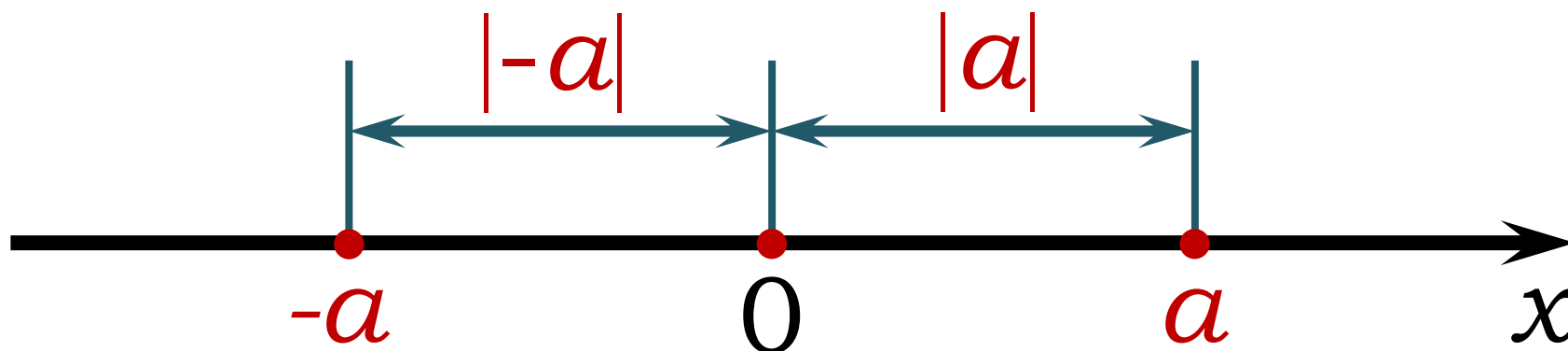


Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля: методы раскрытия

Гриднева Анна Владимировна ,учитель
математики ГБОУ СОШ № 8 им.
С.П.Алексеева, г.о. Отрадный, руководитель
ТУМО учителей математики

Геометрическая интерпретация модуля

Это **расстояние** от начала отсчета до точки, изображающей число .



$$|0 - a| = |-a| = a \qquad |a - 0| = |a| = a$$

Понятие модуля

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется само число a , если оно **неотрицательное**, и число, противоположное a , если a – **отрицательное**.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Пример:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \geq 1,5; \\ -2x + 3, & \text{если } x < 1,5. \end{cases}$$

Свойства модуля

$$1^\circ \quad |a| = |-a|$$

$$2^\circ \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3^\circ \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ где } b \neq 0$$

$$4^\circ \quad |a + b| = |a| + |b|, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0$$

$$5^\circ \quad |a| + |b| = a + b, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0$$

$$6^\circ \quad |a - b| = |a| + |b|, \text{ если } ab \leq 0$$

$$7^\circ \quad |a|^2 = a^2$$

$$8^\circ \quad |a| - |b| \geq 0, \text{ если } a^2 - b^2 \geq 0$$

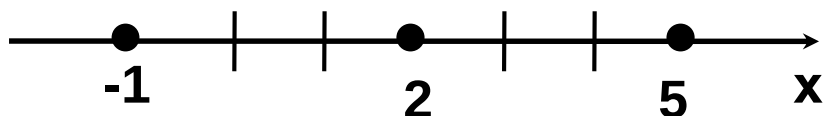
$$9^\circ \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$10^\circ \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Некоторые методы решения уравнений, содержащих модуль.

1 способ (с помощью геометрических соображений)

Ищем точку x на числовой прямой, расположенную на расстоянии трех единичных отрезков от точки 2.



Проверка:

$$\begin{aligned} |5-2| &= |3| = 3 \\ |-1-2| &= |-3| = 3 \end{aligned}$$

Ответ: -1; 5

$$|x - 2| = 3$$

2 способ (по определению модуля)

Уравнение вида $|f(x)| = a$, где $a \geq 0$ распадается на совокупность

уравнений
$$\begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$

Таким образом :

$$\begin{cases} x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ответ: -1; 5

Уравнение вида $|f(x)| = a$, где a – некоторое число

1) не имеет корней, если $a < 0$

(т.к. модуль числа не может быть отрицательным);

2) равносильно уравнению $f(x) = 0$, если $a = 0$

(т.к. расстояние, пройденное через 0 делений, равно 0);

3) равносильно совокупности $\begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$, если $a \geq 0$.

Пример: $|x^2 - 2x - 4| = 4$

Решение: $\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 4 \\ x^2 - 2x - 4 = -4 \end{cases}$

Решив каждое уравнение, найдем, что корнями первого уравнения являются числа 4 и -2, а второго - 0 и 2.

Ответ: -2; 0; 2; 4.

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$

Этот случай похож на предыдущий, но необходимо проверить условие $g(x) \geq 0$

$$\left[\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \left[\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \right.$$

Пример: Решить уравнение $|3x - 10| = x - 2$

$$\text{Решение: } \left[\begin{cases} 3x - 10 = x - 2, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2x = 8, \\ x \geq 2; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x = 12, \\ x \geq 2; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 4, \\ x = 3. \end{cases} \right.$$

Ответ: 3; 4.

Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$

По смыслу модуля выражения $f(x)$ и $g(x)$ либо равны, либо противоположны по знаку, то есть достаточно рассмотреть два случая

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Пример: Решить уравнение $|x^2 + 2x - 1| = |x + 1|$

Решение: Уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 1 = x + 1 \\ x^2 + 2x - 1 = -(x + 1) \end{cases}$$

Корни первого уравнения 1 и -2, а корни второго уравнения 0 и -3.

Ответ: - 3; - 2; 0 ; 1.

Уравнения с несколькими модулями

Алгоритм решения уравнений с модулями:

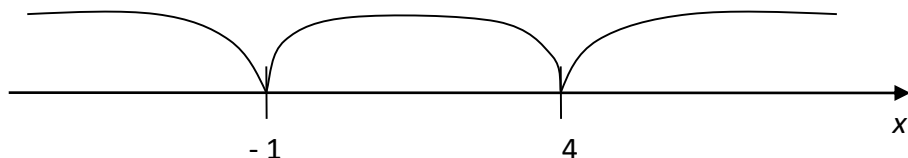
- 1) Найти в уравнении все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
- 2) Найти, при каких значениях переменной они обращаются в нуль.
- 3) Разбить найденными значениями числовую прямую на непересекающиеся промежутки.
- 4) Определить для каждого числового промежутка, чему равно значение каждого модуля: самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или противоположному ему.
- 5) Для каждого числового промежутка записать и решить исходное уравнение без знаков модуля.
- 6) Оставить только те решения, которые соответствуют числовому промежутку, и записать их в ответе.

Пример: Решить уравнение: $|x + 1| + |x - 4| = 5$

Решение: 1) Найдем нули выражений: $x + 1 = 0$ и $x - 4 = 0$, отсюда получаем $x = -1$ и $x = 4$.

2) Изобразим полученные числа на числовой прямой. Они разбили числовую прямую на три промежутка.

3) Найдем решение уравнения на каждом промежутке.



I. $x \in (-\infty; -1]$, тогда $|x + 1| = -x - 1$, а $|x - 4| = -x + 4$. Получим уравнение $(-x - 1) + (-x + 4) = 5$, корень которого равен -1 . Так как $-1 \in (-\infty; -1]$, то число (-1) является корнем уравнения.

II. $x \in (-1; 4]$, тогда $|x + 1| = x + 1$ и $|x - 4| = -x + 4$.
Уравнение примет вид: $(x + 1) + (-x + 4) = 5$ или $0x = 0$. Корнем этого уравнения будет любое число из промежутка $x \in (-1; 4]$.

III. $x \in (4; +\infty)$, $|x - 4| = x - 4$ и $|x + 1| = x + 1$. Получаем уравнение $(x + 1) + (x - 4) = 5$, корнем которого является число -4 , не принадлежащее промежутку $x \in (-1; 4]$.

Итак, общим решением данного уравнения является промежуток $[-1; 4]$.

Ответ: $[-1; 4]$

**Решение неравенств,
содержащих переменную
под знаком модуля.**

По определению модуля

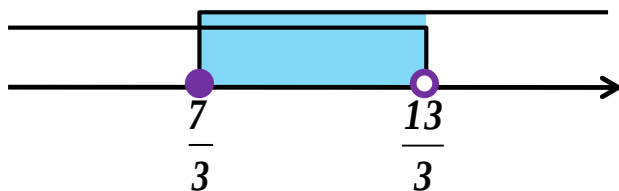
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Пример 1. $|3x - 7| < 6$

1 случай.

$$\begin{cases} 3x - 7 \geq 0 \\ 3x - 7 < 6 \end{cases}$$

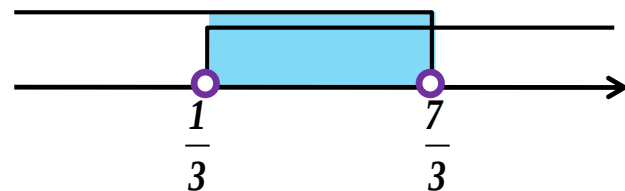
$$\begin{cases} x \geq \frac{7}{3} \\ x < \frac{13}{3} \end{cases}$$



2 случай.

$$\begin{cases} 3x - 7 < 0 \\ -3x + 7 < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{7}{3} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Решением неравенства является объединение решений всех случаев.

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right) \cup \left[\frac{7}{3}; \frac{13}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{13}{3}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{13}{3}\right)$

По определению модуля

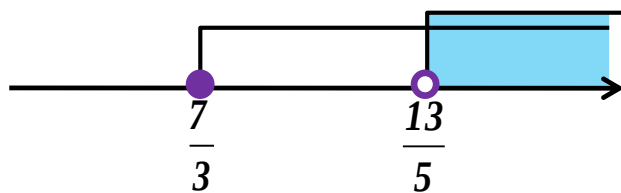
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Пример 2. $|3x - 7| > 6 - 2x$

1 случай.

$$\begin{cases} 3x - 7 \geq 0 \\ 3x - 7 > 6 - 2x \end{cases}$$

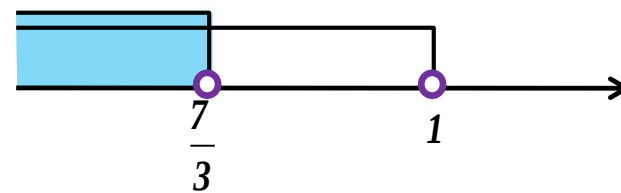
$$\begin{cases} x \geq \frac{7}{3} \\ x > \frac{13}{5} \end{cases}$$



2 случай.

$$\begin{cases} 3x - 7 < 0 \\ -3x + 7 > 6 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{7}{3} \\ x < 1 \end{cases}$$



Ответ : $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{13}{5}; +\infty\right)$

Альтернативные схемы

Можно доказать, что решения рассмотренных неравенств могут быть записаны при помощи следующих **альтернативных схем**:

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ -f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

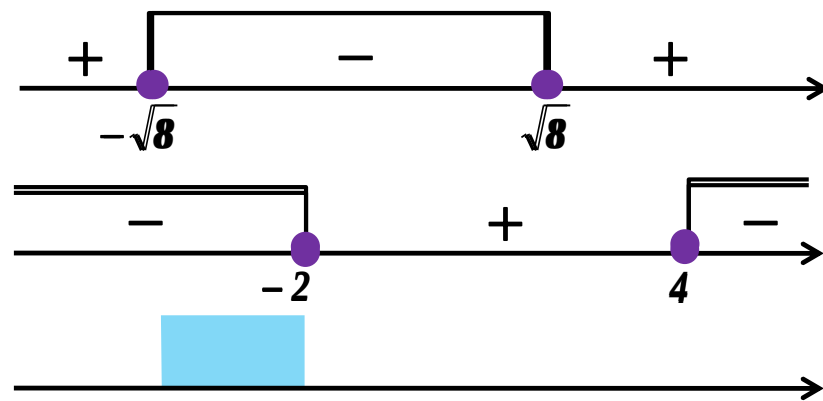
$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ -f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

Использование альтернативных схем.

Пример 3. $|x^2 - x - 8| \leq -x$

$$|x^2 - x - 8| \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 8 \leq -x \\ -x^2 + x + 8 \leq -x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 - 8 \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 8 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) \leq 0 \\ -(x - 4)(x + 2) \leq 0 \end{cases}$$



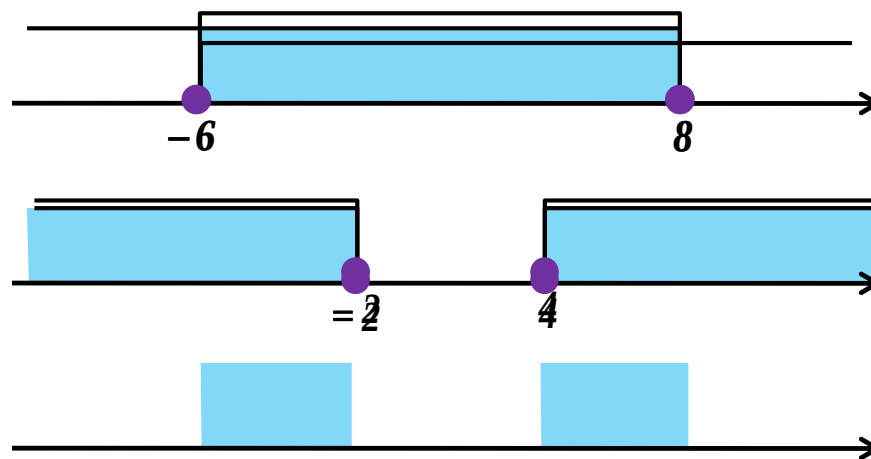
Ответ : $x \in [-\sqrt{8}; -2]$

Использование альтернативных схем.

Пример 4. $\left||x-1|-5\right|\leq 2$

$$\left||x-1|-5\right|\leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|-5\leq 2 \\ -|x-1|+5\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|\leq 7 \\ |x-1|\geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1\leq 7 \\ -x+1\leq 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\geq 3 \\ -x+1\geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\leq 8 \\ x\geq -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 4 \\ x\leq -2 \end{cases} \end{cases}$$



Ответ : $x \in [-6;-2] \cup [4;8]$

Метод интервалов (если модулей несколько).

- 1) На числовой прямой отметить нули подмодульных выражений.***
- 2) Определить знаки выражений на каждом числовом промежутке***
- 3) Раскрыть модули на каждом из промежутков и решить полученное неравенство.***
- 4) Из полученных решений выбрать те, которые данному промежутку принадлежат.***
- 5) Объединить все решения.***

Метод интервалов.

Пример 5. $|x + 5| \geq |3 - x| - |x|$

Нули подмодульных выражений: $x = -5; 0; 3$.

$x + 5$	—	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	—
x	—	—	+	+
	$(-\infty; -5)$	$[-5; 0)$	$[0; 3)$	$[3; +\infty)$



Замечание: концевые точки (нули подмодульных выражений) не обязательно включать в промежутки именно таким образом. Это можно сделать и по другому. Главное, чтобы каждая точка попала в один из рассматриваемых промежутков.

$$x \in (-\infty; -8]$$

Метод интервалов.

Пример 5. $|x + 5| \geq |3 - x| - |x|$

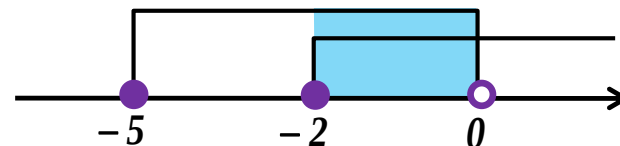
Нули подмодульных выражений: $x = -5; 0; 3$.

$x + 5$	—	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	—
x	—	—	+	+
	$(-\infty; -5)$	$[-5; 0)$	$[0; 3)$	$[3; +\infty)$

$\xrightarrow{\hspace{10cm}}$
 $\qquad\qquad\qquad -5 \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 3$

2 случай.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-5; 0) \\ (x + 5) \geq (3 - x) - (-x) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in [-5; 0) \\ x \geq -2 \end{array} \right.$$



$$\boxed{x \in [-2; 0)}$$

Метод интервалов.

Пример 5. $|x + 5| \geq |3 - x| - |x|$

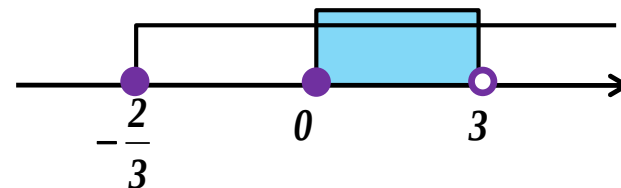
Нули подмодульных выражений: $x = -5; 0; 3$.

$x + 5$	—	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	—
x	—	—	+	+
	$(-\infty; -5)$	$[-5; 0)$	$[0; 3)$	$[3; +\infty)$

$\xrightarrow{\hspace{10cm}}$
 $\qquad\qquad\qquad -5 \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 3$

3 случай.

$$\begin{cases} x \in [0; 3) \\ (x + 5) \geq (3 - x) - (x) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [0; 3) \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases}$$



$x \in [0; 3)$

Метод интервалов.

Пример 5. $|x + 5| \geq |3 - x| - |x|$

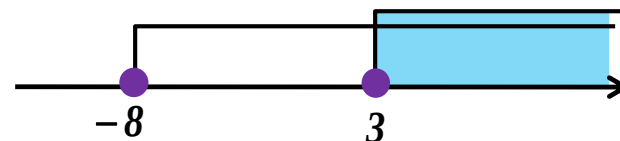
Нули подмодульных выражений: $x = -5; 0; 3$.

$x + 5$	—	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	—
x	—	—	+	+
	$(-\infty; -5)$	$[-5; 0)$	$[0; 3)$	$[3; +\infty)$

$\xrightarrow{\hspace{10cm}}$
 $\hspace{10cm}$

4 случай.

$$\begin{cases} x \in [3; +\infty) \\ (x + 5) \geq (-3 + x) - (x) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [3; +\infty) \\ x \geq -8 \end{cases}$$

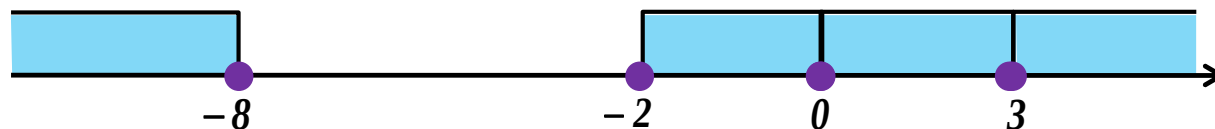


$$\boxed{x \in [3; +\infty)}$$

Метод интервалов.

Пример 5. $|x + 5| \geq |3 - x| - |x|$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -8] \\ x \in [-2; 0) \\ x \in [0; 3) \\ x \in [3; +\infty) \end{cases}$$



Ответ : $(-\infty; -8] \cup [-2; +\infty)$

*Решением неравенства
является объединение
решений всех случаев.*

Метод замены множителей.

Пример 6.
$$\frac{|3x - 2| - |2x - 3|}{|x^2 + x - 8| - |x^2 - x|} \leq 0$$

Теорема : *неравенство $f(x) \geq g(x)$ при $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ равносильно неравенству $f^2(x) \geq g^2(x)$, т.е. неравенство $f(x) - g(x) \geq 0$ равносильно неравенству $f^2(x) - g^2(x) \geq 0$.*

Другими словами: знак выражения $f(x) - g(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ совпадает со знаком выражения $f^2(x) - g^2(x)$.

Метод замены множителей.

Примеры замены множителей при решении неравенств с модулями.

<i>Знаки этих выражений совпадают</i>	
$ f(x) - g(x) $	$f^2(x) - g^2(x) = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$
$\frac{ f(x) - g(x) }{ s(x) - h(x) }$	$\frac{f^2(x) - g^2(x)}{s^2(x) - h^2(x)} = \frac{(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))}{(s(x) - h(x))(s(x) + h(x))}$

Таким образом некоторые неравенства с модулями легко сводятся к простым рациональным неравенствам

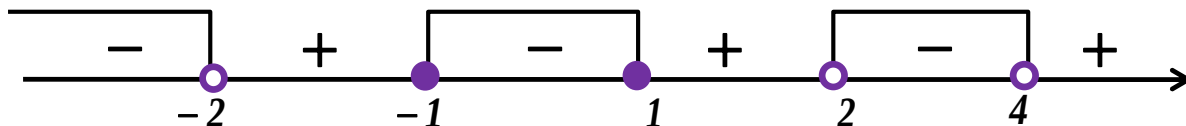
Метод замены множителей.

Пример 6.
$$\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2)^2 - (2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2 - (x^2-x)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{((3x-2)-(2x-3))((3x-2)+(2x-3))}{((x^2+x-8)-(x^2-x))((x^2+x-8)+(x^2-x))} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)} \leq 0$$



Ответ : $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)$