

Тема: Понятие параметра в курсе алгебры 7-9 классов

От линейных уравнений до квадратичных
задач .

Учитель математики ГБОУ СОШ №8

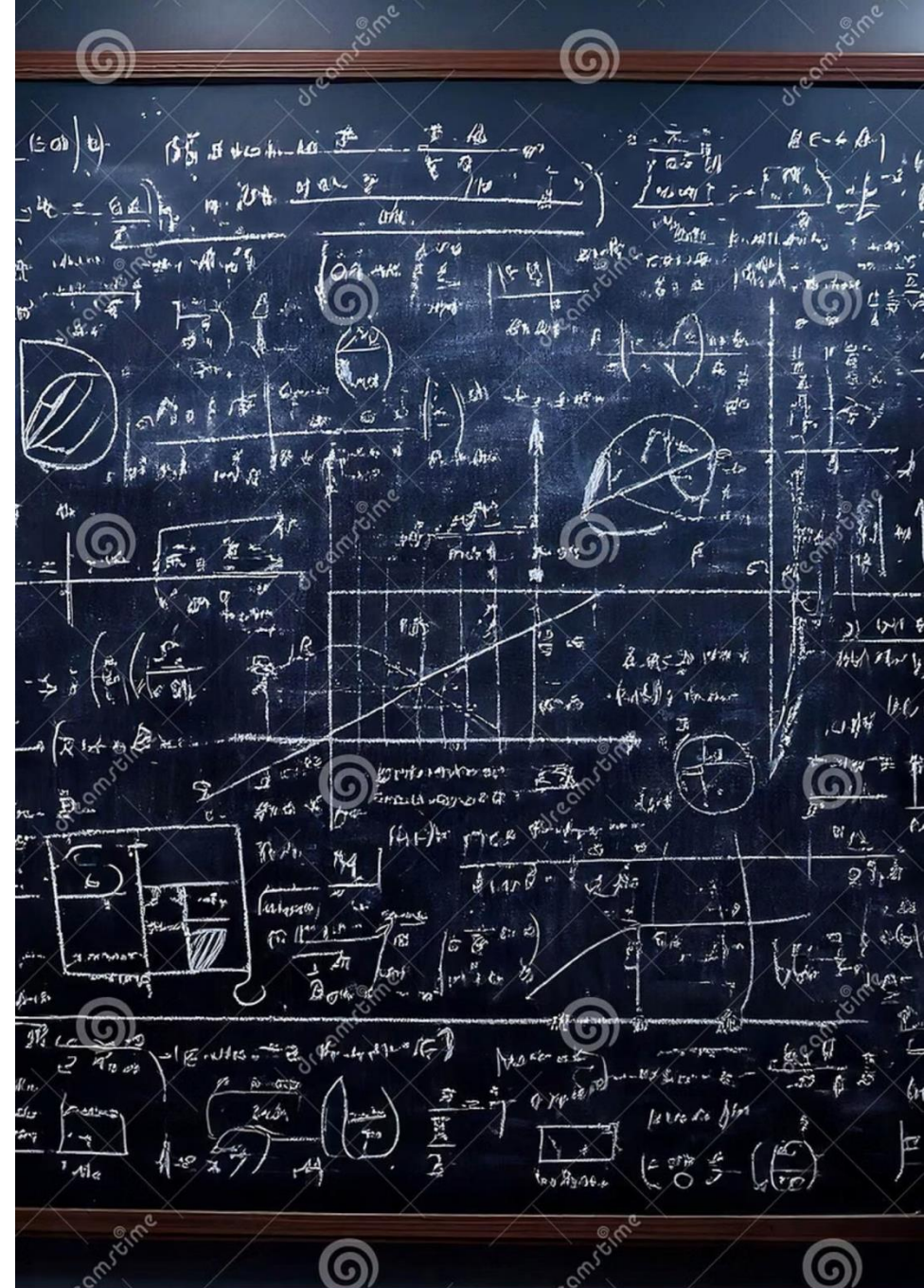
им. С. П. Алексеева г. о. Отрадный

Аношина М. О.

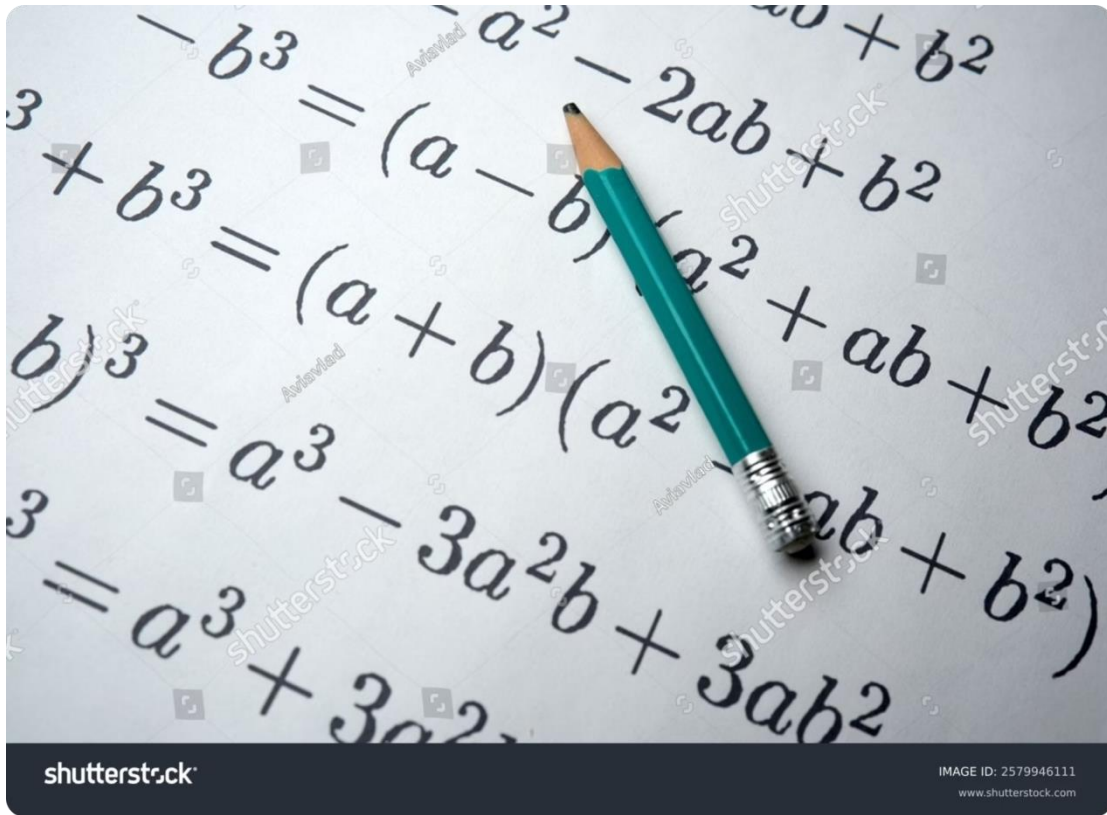
Учитель математики ГБОУ СОШ № 8

им. С. П. Алексеева г.о. Отрадный

Рихтер А.Н.



Что такое параметр?



Скрытая переменная

Параметр влияет на решение уравнения, но считается **фиксированным** при каждом конкретном разборе.

Обозначение

Неизвестная — это **x**, а параметры — буквы **a, b, c** и другие.

Цель решения

Найти все решения для **любого допустимого** значения параметра.

Линейные уравнения с параметром

7 КЛАСС

Линейные уравнения с параметром — это первый шаг в изучении параметров. Обычно параметр может стоять **в коэффициенте при x** или **в свободном члене**. Главная задача — **разобрать все возможные случаи** и понять, как меняется число решений в зависимости от значения параметра.

Случай 1: $a \neq 0$

Это **нормальный случай**: мы можем разделить обе части уравнения на **a** . Тогда уравнение имеет **единственное решение**: $x = b/a$.

Случай 2: $a = 0, b \neq 0$

Уравнение $0 \cdot x = b$ превращается в $0 = b$, а это невозможно. Значит, **решений нет**.

Случай 3: $a = 0, b = 0$

Уравнение $0 \cdot x = 0$ всегда верно. Подходит **любое x** , поэтому решений **бесконечно много**.

 **Ключевая идея:** сначала отделяем обычный случай, а затем отдельно анализируем критические значения параметра. Именно так удобно решать почти все линейные уравнения с параметром.

Алгоритм анализа параметра

Шаг	Что делать	Зачем
1	Найти критические значения параметра	Именно там коэффициент при x может обратиться в ноль
2	Рассмотреть случай, когда коэффициент при x не равен нулю	Тогда можно выразить x и получить обычное решение
3	Отдельно проверить критические значения	Там уравнение может стать либо невозможным, либо тождественным
4	Сделать вывод о числе решений	Записать ответ для каждого значения параметра

⚠ **Важно:** всегда проверяйте **критические значения параметра** — именно в них коэффициент при x обращается в ноль, и поведение уравнения может резко измениться.

Пример с полным решением

Решить уравнение: $(a-2)x = a^2 - 4$.

1. Случай $a \neq 2$

Коэффициент при x не равен нулю, значит можно разделить обе части на $a - 2$.

2. Находим x

$$x = (a^2 - 4)/(a - 2) = (a - 2)(a + 2)/(a - 2) = a + 2.$$

3. Случай $a = 2$

Получаем $0 \cdot x = 0$, а это тождество. Значит, **бесконечно много решений**: подходит любое x .

Ответ: при $a \neq 2$ решение одно: $x = a + 2$; при $a = 2$ решений бесконечно много.

Системы линейных уравнений с параметрами

Система двух линейных уравнений с параметром — это естественное продолжение темы линейных уравнений с параметром. Здесь параметр может входить как в коэффициенты при переменных, так и в свободные члены, и от его значения зависит число решений системы.

→ Единственное решение

Прямые пересекаются в одной точке.

Условие: определитель системы $\neq 0$.



→ Бесконечно много решений

Прямые совпадают.

Условие: все коэффициенты пропорциональны.



→ Нет решений

Прямые параллельны.

Условие: коэффициенты при переменных пропорциональны, но свободные члены — нет.



Квадратные уравнения и параметры

8–9 КЛАСС

Квадратные уравнения с параметрами — это более сложный уровень по сравнению с линейными уравнениями с параметром. Параметр может входить в коэффициенты **a**, **b** или **c**, и от его значения зависит количество и вид корней. Главный инструмент анализа — **дискриминант $D = b^2 - 4ac$** .

$D > 0$

Два различных
действительных корня

Формула: $x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$

$D = 0$

Один корень (два
совпадающих)

Формула: $x = -b / 2a$

$D < 0$

Нет действительных корней

📌 **Пример:** $x^2 + ax + 1 = 0$. При каких значениях **a** уравнение имеет два различных корня?

Решение: $D = a^2 - 4$. Чтобы были два различных корня, нужно $a^2 - 4 > 0$, откуда $a^2 > 4$, то есть $a < -2$ или $a > 2$.

⚠️ **Важно:** если параметр входит в коэффициент при x^2 , обязательно проверьте, что этот коэффициент не равен нулю. Иначе уравнение может перестать быть квадратным.

Расположение корней квадратного трёхчлена

Это более продвинутая задача: нужно анализировать не только **существование корней**, но и **их расположение на числовой оси** относительно заданных точек или интервалов. Такие задачи особенно важны при решении более сложных уравнений и неравенств с параметрами.

1 Дискриминант

Проверяем существование корней: $D \geq 0$. Если корней нет, то рассматривать их расположение невозможно.

2 Вершина параболы

Анализируем положение оси симметрии $x = -b/2a$ относительно интересующих нас точек и интервалов.

3 Значения на границах

Проверяем знак функции $f(x)$ в ключевых точках — на границах интервалов и в опорных точках.

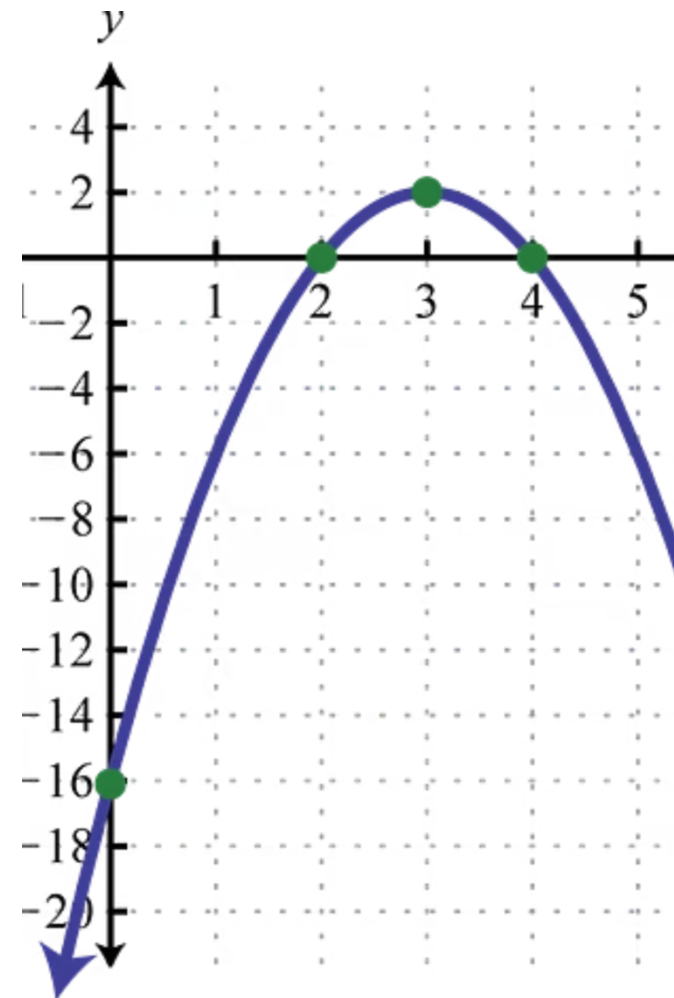
▣ **Пример:** $f(x) = x^2 - (a+1)x + a$. При каких значениях a оба корня находятся в интервале $(0, 2)$?
Решение требует: $D \geq 0$, вершина должна лежать в интервале $(0, 2)$, а также должно выполняться $f(0) > 0$ и $f(2) > 0$.

Оба корня больше числа m
 $f(m) > 0$, вершина правее m , $D \geq 0$

Оба корня в интервале (m, n)
 $D \geq 0$, вершина в интервале, $f(m) > 0$, $f(n) > 0$

Корни по разные стороны от точки m
 $f(m) < 0$ и $D \geq 0$

⚠ **Важно:** при анализе положения корней всегда сочетайте проверку существования корней с исследованием знаков функции в опорных точках. Одного дискриминанта недостаточно.



Неравенства с параметрами

Принцип решения

Неравенства с параметрами, как и уравнения, обычно требуют **разбора случаев** в зависимости от значений параметра. Ключевой момент — при умножении или делении на выражение с параметром нужно обязательно учитывать его **знак**, потому что от этого зависит **направление неравенства**.

Сначала находят **критические значения параметра** — те, при которых коэффициент обращается в ноль или меняет знак. Затем область значений параметра разбивают на интервалы и для **каждого интервала решают неравенство отдельно**.



Типичные ошибки

- Не проверяют значения параметра, при которых коэффициент равен нулю.
- Забывают изменить знак неравенства при делении на отрицательное выражение.
- Решают все случаи сразу, не разбивая область параметра на интервалы.
- Не отдельно рассматривают вырожденный случай, когда старший коэффициент обращается в ноль.

⚠ Пример 1: $ax + b > 0$.

- При $a > 0$: $x > -b/a$
- При $a < 0$: $x < -b/a$ (неравенство переворачивается!)
- При $a = 0$: проверяем, верно ли $b > 0$

📌 Пример 2: $(a-1)x^2 + 2x + 1 \geq 0$.

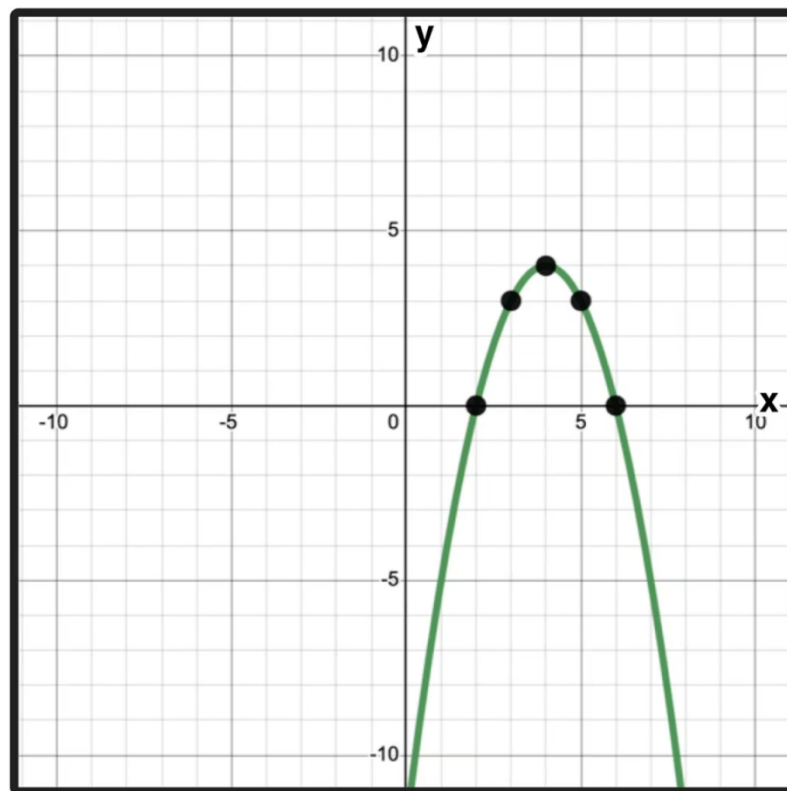
- При $a > 1$: парабола ветвями вверх
- 1: получаем линейное неравенство $2x + 1 \geq 0$
- При $a < 1$: парабола ветвями вниз

Графический метод решения задач с параметрами

Визуализация через графики — мощный инструмент для понимания задач с параметрами.

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

x	y
2	0
3	3
4	4
5	3
6	0



- ☐ **Пересечение графиков**
Число точек пересечения соответствует числу решений
- ☐ **Расположение относительно осей**
Помогает определить знак корней и интервалы решений
- ☐ **Параметр как «движение»**
Изменение параметра — это «скольжение» или «деформация» графика



Почему параметры важны?



Логическое мышление

Требуют гибкости, анализа и умения обобщать — навыки, полезные далеко за пределами математики.



Подготовка к экзаменам

Задачи с параметрами регулярно встречаются на ГИА, ЕГЭ и олимпиадах.



Исследовательский подход

Стимулируют настоящий исследовательский интерес: как свойства уравнений зависят от их параметров?

Заключение: параметр как инструмент исследования

Задачи с параметрами — это не просто «сложные задачи», а мощный инструмент для глубокого понимания математических концепций.

Общие закономерности

Учат видеть структуру и анализировать множество сценариев

Аналитические навыки

Развивают ценные способности к системному мышлению

Дверь вперёд

Освоение параметров открывает путь к продвинутой математике